Einige Bemerkungen zu Gleichungen und Symmetrien, die geometrische Körper beschreiben und ihre Symmetrien. Zu Objekten der „Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente“ am mathematischen Institut der Georg-August-Universität Göttingen

Für die Veranstaltung mit Eltern und Schülerinnen und Schülern des Max-Planck-Gymnasiums Göttingen am 11. Juli 2012

1. Kartesische Koordinatensysteme

Geometrische Körper können bezüglich eines „kartesischen“ Koordinatensystems des Raumes beschrieben werden: Dafür legt man drei Geraden in den Raum, die sich in einem Ursprung schneiden und von denen immer zwei zueinander senkrecht stehen. Im Ursprung setzt man für alle drei Geraden den Nullpunkt an, dann wählt man eine Skala auf der Geraden mit gleichen Abständen. In die eine Richtung vom Ursprung gesehen steigen die Werte der Geraden an – gedanklich geht es unendlich weiter – und in die andere Richtung fallen die Werte ins Negative – ebenfalls beliebig negativ.

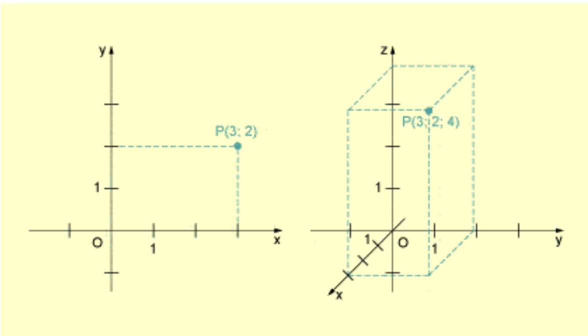

Abb. 1: Punkte bzgl. kartesischer Koordinatensysteme.
Diese Skizze ist aus dem Online-„Schülerlexikon“[1]; dort kann man auch weitere Erläuterungen dazu finden.

Wie im Zweidimensionalen kann man im Dreidimensionalen dann die Punkte durch die Angabe von drei Werten eindeutig fest legen. Wenn wir den Achsen für diese Festlegung eine Reihenfolge geben (wie x-Achse, y-Achse, z-Achse), bedeutet der Punkt P mit den Koordinaten (3;2;4), dass die orthogonale Projektion des Punktes auf die x-Achse der Wert 3, auf die y-Achse der Wert 2 und die orthogonale Projektion auf die z-Achse den Wert 4 ergibt. Natürlich kann man auch ganz andere Bezeichnungen für die Achsen nehmen; oft findet sich eine Nummerierung der Achsen: x_1-Achse, x_2-Achse, x_3-Achse.

[1] http://m.schuelerlexikon.de/ma_abi2011/Kartesisches_Koordinatensystem.htm

Es besteht einige Freiheit in der Wahl des Koordinatensystems. Dazu gehört die Wahl des Ursprungs, der Achsen und ihrer Skalierung. Manche Konventionen ergeben besonders in der euklidischen Geometrie Sinn: dass Strecken gleicher Längen auf den unterschiedlichen Achsen kongruent sind oder dass die Achsen in bestimmter Weise orientiert sind, z. B. in der Reihenfolge gespreizter Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand.

2. Die Koordinatenebenen

Je zwei Achsen des kartesischen Koordinatensystems legen eine Koordinatenebene fest. Dazu gehören drei: Die x-y-Ebene, die x-z-Ebene und die y-z-Ebene:

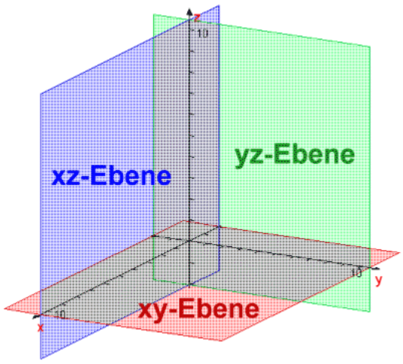

Abb. 2: Die drei Koordinatenebenen;
wieder ist dies einer Webseite entnommen
auf der man sich weiter informieren kann[2].

Man erkennt an einem Punkt, dass er auf x-y-Ebene liegt, dass seine z-Koordinate gleich 0 ist. Mit anderen Worten: Die x-y-Ebene E_{xy} ist die Menge aller Punke mit beliebigen reellen Einträgen in den ersten beiden Komponenten und 0 in der dritten Komponente. In Symbolen schreibt man

$$E_{xy} = \{(x, y, 0) | x, y \in IR\}.$$

In gleicher Weise kann man die x-z-Ebene beschreiben als

$$E_{xz} = \{(x, 0, z) | x, z \in IR\}$$

und die y-z-Ebene als

$$E_{yz} = \{(0, y, z) | y, z \in IR\}.$$

3. Spiegelung an den Koordinatenebenen

[2] http://lernen.mws.tue.bw.schule.de/vekgeo/010PunkteImRaum/koordinatenebenen.gif

An den Koordinatenebenen kann man Punkte spiegeln, indem man das Lot von dem zu spiegelnden Punkte P auf die Ebene fällt und auf dem Strahl vom Punkt zum Lotfußpunkt L die Strecke zwischen Punkt und Lotfußpunkt vom Lotfußpunkt ausgehend noch einmal abträgt. Als Endpunkt der Strecke erhält man den gespiegelten Punkt P'.

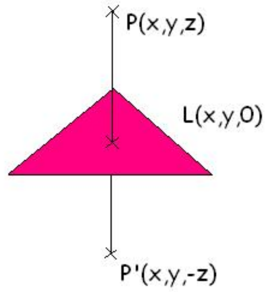

Abb. 3: Spiegelung an der x-y-Ebene

Wenn man dies im Fall der Spiegelung an der x-y-Ebene in Koordinaten ausdrücken möchte, sieht man, dass die x- und die y-Koordinaten fest bleiben und sich das Vorzeichen der z-Komponente umdreht. Als Abbildung S_{xy}, die einen Punkt (x,y,z) aus IR^3 (der Menge der Tripel aus drei reellen Zahlen) auf den Punkt $(x,y,-z)$ (wieder aus dem IR^3) abbildet, schreibt man:

$$\begin{array}{rcl} S_{xy} : IR^3 & \rightarrow & IR^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,-z)\,. \end{array}$$

In analoger Weise lassen sich Spiegelungen an den übrigen Koordinatenebenen darstellen. Die Spiegelung an der x-z-Ebene ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} S_{xz} : IR^3 & \rightarrow & IR^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,-y,z) \end{array}$$

und die Spiegelung an der y-z-Ebene durch

$$\begin{array}{rcl} S_{yz} : IR^3 & \rightarrow & IR^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x,y,z)\,. \end{array}$$

4. Hintereinanderausführung der Spiegelungen an den Koordinatenebenen

Spiegelungen an den Koordinatenebenen lassen die Spiegel-Koordinatenebene fest. Wenn man zunächst eine Spiegelung an einer Koordinatenebene durchführt, z. B. S_{xy} an der x-y-Ebene, und dann eine andere, z. B. S_{yz} an der y-z-Ebene, dann bleibt bei beiden die y-Achse fest. Ein allgemeiner Punkt $P(x, y, z)$ wird zunächst durch die Spiegelung an der x-y-Ebene auf $(x, y, -z)$ abgebildet und der dann durch Spiegelung an der y-z-Ebene auf $(-x, y, -z)$.

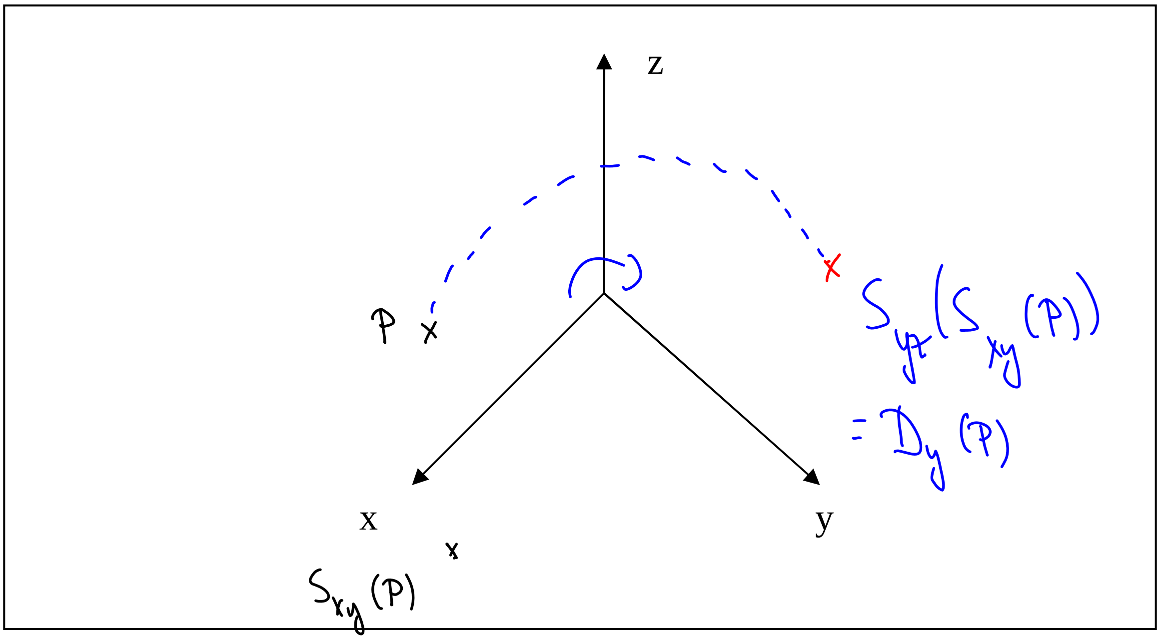

Abb. 4: Hintereinanderausführung von Spiegelungen
an der x-y-Ebene und danach an der y-z-Ebene

Eine Hintereinanderschaltung $S_{yz} \circ S_{xy}$ steht für die Abbildung, die in einem Rutsch das macht, was erst die Abbildung S_{xy} und danach die Abbildung S_{yz} bewirken. Dies lässt sich so ausrechnen:

$$(S_{yz} \circ S_{xy})(x, y, z) = S_{yz}(S_{xy}(x, y, z)) = S_{yz}(x, y, -z) = (-x, y, -z)$$

Geometrisch bedeutet die Abbildung eine Drehung um die y-Achse mit dem Winkel 180^o. Diese Abbildung werden wir mit D_y bezeichnen. Übrigens gilt in diesem Beispiel auch $D_y = S_{xy} \circ S_{yz}$. (Die Vertauschbarkeit sollte man sich aber nicht als Regel für das Hintereinanderausführen von Abbildungen merken. Dies ist eine Ausnahme, nicht die Regel.)

Ebenso definieren wir die Drehung um die x-Achse als

$$D_x = S_{xy} \circ S_{xz} = S_{xz} \circ S_{xy}$$

und die Drehung um die z-Achse als

$$D_z = S_{xz} \circ S_{yz} = S_{yz} \circ S_{xz}.$$

Die Frage ist nun, ob es durch weitere Hintereinanderausführungen dieser Abbildungen noch neue entstehen können.

5. Welche Abbildungen man als Hintereinanderausführungen der Spiegelungen an den Koordinatenachsen darstellen kann

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, dass man die Spiegelungen S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} so oft hintereinander ausführen kann, wie man möchte, aber nur endlich viele verschiedene Abbildungen dadurch erzeugen kann.

Fangen wir mit der letzten an. Die erhält man beispielsweise, wenn man eine der Spiegelungen an den Koordinatenebenen zweimal hintereinander ausführt:

$$(S_{xy} \circ S_{xy})(x,y,z) = S_{xy}(S_{xy}(x,y,z)) = S_{xy}(x,y,-z) = (x,y,-(-z)) = (x,y,z) = id(x,y,z).$$

Also macht die Abbildung sich selbst wieder rückgängig. Ebenso kann man nachrechnen, dass jede der Abbildungen S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}, D_x, D_y, D_z sich selbst wieder rückgängig macht.

Nachrechnen sollten wir noch, was geschieht, wenn man eine Spiegelung an einer Koordinatenebene mit einer Drehung um eine Koordinatenachse verknüpft. Beispielsweise gilt

$$(D_x \circ S_{xy})(x,y,z) = D_x(S_{xy}(x,y,z)) = D_x(x,y,-z) = (x,-y,-(-z)) = (x,-y,z) = S_{xz}(x,y,z)$$

und

$$(D_z \circ S_{xy})(x,y,z) = D_z(S_{xy}(x,y,z)) = D_z(x,y,-z) = (-x,-y,-z) = (-x,-y,-z) = -id(x,y,z).$$

Letzteres ergibt die Punktspiegelung $-id$ am Koordinatenursprung.

Wenn man dies weiter ausrechnet, erhält man neben den Spiegelungen an den Koordinatenachsen S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} nur die Drehungen D_x, D_y, D_z, die Punktspiegelung am Ursprung $-id$, sowie die identische Abbildung id, die jeden Punkt auf sich selbst abbildet.

Dies kann man in einer Tabelle wie folgt festhalten: in den Spalten steht die erste Abbildung, die ausgeführt wird, und in den Zeilen die zweite.

$\circ$	id	$-id$	S_{xy}	S_{xz}	S_{yz}	D_x	D_y	D_z
id	id	$-id$	S_{xy}	S_{xz}	S_{yz}	D_x	D_y	D_z
$-id$	$-id$	id	D_z	D_y	D_x	S_{yz}	S_{xz}	S_{xy}
S_{xy}	S_{xy}	D_z	id	D_x	D_y	S_{yz}	S_{xz}	$-id$
S_{xz}	S_{xz}	D_y	D_x	id	D_z	S_{xy}	$-id$	S_{yz}
S_{yz}	S_{yz}	D_x	D_y	D_z	id	$-id$	S_{xz}	S_{xz}
D_x	D_x	S_{yz}	S_{yz}	S_{xy}	$-id$	id	D_z	D_y
D_y	D_y	S_{xz}	S_{xz}	$-id$	S_{xz}	D_z	id	D_x
D_z	D_z	S_{xy}	$-id$	S_{yz}	S_{xz}	D_y	D_x	id

Tab. 1: Hintereinanderausführungen von je zwei Abbildungen, die man durch Hintereinanderausführungen von Spiegelungen an den Koordinatenebenen erzeugen kann

6. Eine Erinnerung an Polynomfunktionen mit Graphen, die achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse bzw. punktsymmetrisch bzgl. der Ursprungs sind

Auf den reellen Zahlen wird die Spiegelung am Ursprung dargestellt durch $S: IR \to IR, x \mapsto -x$. Es haben genau die Funktionen $f: IR \to IR$ einen Graphen, der achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse ist, wenn für alle $x \in IR$ gilt $f(S(x)) = f(x)$, also $f(-x) = f(x)$. Es haben genau die Funktionen $f: IR \to IR$ einen Graphen, der punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs ist, wenn für alle $x \in IR$ gilt $f(S(x)) = -f(x)$, also $f(-x) = -f(x)$.

Man kann zeigen, dass ein Polynom genau dann einen Graphen besitzt, der achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse ist, wenn nur vor Monomen mit geraden Exponenten x^{2k} (mit $k = 0;1;2;\ldots$) von Null verschiedene Vorfaktoren stehen. Dabei wird $1 = x^0$ als Monom mit geradem Exponenten 0 angesehen.

Ein Polynom besitzt genau dann einen Graphen, der achsensymmetrisch bzgl. des Ursprungs ist, wenn nur vor Monomen mit ungeraden Exponenten x^{2k+1} (mit $k = 0;1;2;\ldots$) von Null verschiedene Vorfaktoren stehen. Dabei muss vor $1 = x^0$ als Monom mit geradem Exponenten der Vorfaktor 0 stehen.

Dass diese Polynome die Eigenschaften erfüllen, ist dabei nicht so schwierig zu beweisen.

Behauptung: Alle Polynome $P(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots a_{2n}x^{2n}$ haben einen Graphen, der achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse ist.
Beweis:
Es ist zu zeigen, dass für alle $x \in IR$ gilt $P(S(x)) = P(x)$, also $P(-x) = P(x)$. Für alle $x \in IR$ gilt

$$P(-x) = a_0 + a_2(-x)^2 + a_4(-x)^4 + \ldots a_{2n}(-x)^{2n} = a_0 + a_2(-x)^2 + a_4((-x)^2)^2 + \ldots a_{2n}((-x)^2)^n$$
$$= a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots a_{2n}x^{2n} = P(x).$$

Dies war zu zeigen.

Schwieriger ist es zu zeigen, dass keine anderen Polynome diese Eigenschaft besitzen. Um einen Eindruck davon zu bekommen, was man dafür machen muss, beschränken wir uns auf Polynome vom Grad kleiner oder gleich 4.

Behauptung: Es sei $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ ein Polynom vom Grad 4 mit reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in IR$. Wenn für jedes $x \in IR$ gilt $P(S(x)) = P(x)$, also $P(-x) = P(x)$, dann folgt, dass $a_1 = 0$ und $a_3 = 0$.

Beweis:
Aus der Bedingung $P(1) = P(-1)$ folgt $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4$, dies ist äquivalent zu $a_1 + a_3 = 0$. Aus der Bedingung $P(2) = P(-2)$ folgt $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + 16a_4$, dies ist äquivalent zu $a_1 + 2a_3 = 0$. Subtrahiert man die Gleichung $a_1 + a_3 = 0$ von $a_1 + 2a_3 = 0$, so folgt $a_3 = 0$. Einsetzen in eine der beiden liefert dann $a_1 = 0$.

7. Polynome in mehreren Variablen, die invariant unter einer Spiegelung an einer Koordinatenebene sind

Ein Polynom in drei Variablen, das höchstens den Grad 2 besitzt, hat die Gestalt $P(x, y, z) = a_0 + b_1x + b_2y + b_3z + c_{200}x^2 + c_{110}xy + c_{101}xz + c_{020}y^2 + c_{011}yz + c_{002}z^2$ mit reellen Zahlen $a_0, b_1, b_2, b_3, c_{200}, c_{020}, c_{002}, c_{110}, c_{101}, c_{011} \in IR$. Wir wollen zeigen, dass die Spiegelung S_{yz} an der y-z-Ebene genau dann das Polynom unverändert lässt, wenn die Variable x nur in Quadraten vorkommt, also $b_1 = 0$, $c_{110} = 0$, $c_{101} = 0$ gilt.

Behauptung: Das Polynom $P(x,y,z) = a_0 + b_2 y + b_3 z + c_{200} x^2 + c_{020} y^2 + c_{011} yz + c_{002} z^2$ ist invariant unter S_{yz}, d.h. für alle $(x,y,z) \in IR^3$ gilt $P(S_{yz}(x,y,z)) = P(x,y,z)$.

Beweis:
Für alle $(x,y,z) \in IR^3$ gilt
$P(S_{yz}(x,y,z)) = P(-x,y,z) = a_0 + b_2 y + b_3 z + c_{200}(-x)^2 + c_{020} y^2 + c_{011} yz + c_{002} z^2$
$= a_0 + b_2 y + b_3 z + c_{200} x^2 + c_{020} y^2 + c_{011} yz + c_{002} z^2 = P(x,y,z).$
Dies war zu zeigen.

Behauptung: Ein Polynom vom Grad 2
$P(x,y,z) = a_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + c_{200} x^2 + c_{110} xy + c_{101} xz + c_{020} y^2 + c_{011} yz + c_{002} z^2$ mit reellen Zahlen $a_0, b_1, b_2, b_3, c_{200}, c_{020}, c_{002}, c_{110}, c_{101}, c_{011} \in IR$ ist nur dann invariant unter der Spiegelung S_{yz} an der y-z-Ebene, wenn $b_1 = 0$, $c_{110} = 0$, $c_{101} = 0$ gilt.

Beweis:
Es sei $P(x,y,z) = a_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + c_{200} x^2 + c_{110} xy + c_{101} xz + c_{020} y^2 + c_{011} yz + c_{002} z^2$ mit reellen Zahlen $a_0, b_1, b_2, b_3, c_{200}, c_{020}, c_{002}, c_{110}, c_{101}, c_{011} \in IR$, so dass für alle $(x,y,z) \in IR^3$ gilt $P(S_{yz}(x,y,z)) = P(x,y,z)$, also $P(-x,y,z) = P(x,y,z)$.
Die Bedingung $P(1;0;0) = P(-1;0;0)$ liefert $a_0 + b_1 + c_{200} = a_0 - b_1 + c_{200}$, dies ist äquivalent zu $b_1 = 0$. Die Bedingung $P(1;0;1) = P(-1;0;1)$ liefert
$a_0 + b_1 + b_3 + c_{200} + c_{101} + c_{002} = a_0 - b_1 + b_3 + c_{200} - c_{101} + c_{002}$. Dies ist äquivalent zu
$b_1 + c_{101} = 0$. Aus $b_1 = 0$ folgt dann $c_{101} = 0$.
Die Bedingung $P(1;1;0) = P(-1;1;0)$ liefert
$a_0 + b_1 + b_2 + c_{200} + c_{110} + c_{020} = a_0 - b_1 + b_2 + c_{200} - c_{101} + c_{002}$. Dies ist äquivalent zu
$b_1 + c_{110} = 0$. Aus $b_1 = 0$ folgt dann $c_{110} = 0$.

Für die anderen Spiegelungen an den Koordinatenebenen gelten dann analoge Aussagen, die man durch Vertauschung der Rollen der Koordinaten erhält.

8. Invariante Polynome unter Abbildungen, die von Spiegelungen an den Koordinatenebenen erzeugt werden

Analog zum Vorgehen bei der Spiegelung S_{yz} kann man für die anderen Spiegelungen an Achsenspiegelungen und die durch sie mit Hintereinanderausführung erzeugten Abbildungen vorgehen. Hier ist die Liste aller Polynome, die jeweils unter diesen Abbildungen invariant sind.

id	Alle Polynome
$-id$	$P(x,y,z)=a_0+c_{200}x^2+c_{110}xy+c_{101}xz+c_{020}y^2+c_{011}yz+c_{002}z^2$
S_{xy}	$P(x,y,z)=a_0+b_1x+b_2y+c_{200}x^2+c_{110}xy+c_{020}y^2+c_{002}z^2$
S_{xz}	$P(x,y,z)=a_0+b_1x+b_3z+c_{200}x^2+c_{101}xz+c_{020}y^2+c_{002}z^2$
S_{yz}	$P(x,y,z)=a_0+b_2y+b_3z+c_{200}x^2+c_{020}y^2+c_{011}yz+c_{002}z^2$
D_x	$P(x,y,z)=a_0+b_1x+c_{200}x^2+c_{020}y^2+c_{011}yz+c_{002}z^2$
D_y	$P(x,y,z)=a_0+b_2y+c_{200}x^2+c_{101}xz+c_{020}y^2+c_{002}z^2$
D_z	$P(x,y,z)=a_0+b_3z+c_{200}x^2+c_{110}xy+c_{020}y^2+c_{002}z^2$

Tab. 2: Polynome, die jeweils unter den in der linken Spalte angegebenen Abbildungen invariant sind

Porträt eines dreidimensionalen Körpers

Gruppe I

Stellen Sie den Körper mittig auf den Ursprung (0,0).

1.) Fertigen Sie eine kleine Skizze von dem Körper an.

2.) Verändert der Körper seine Gestalt, wenn man ihn an der x-y-Ebene (x-z-Ebene, z-y-Ebene) spiegelt?

Ebene	
x-y Ebene	
y-z Ebene	
x-z Ebene	

3.) An welcher der drei Achsen (x,y,z-Achse) kann man den Körper um 180° (90°) drehen, ohne dass er seine Gestalt verändert?

Achse	**180°**	**90°**
x-Achse		
y-Achse		
z-Achse		

4.) Finden Sie Punkte (, ,) die auf dem Rand des Körpers liegen.

5.) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
Was bedeuten sie?

f (x,y,z) = f (x,-y,-z)	Drehung an der x-Achse (D_x)
f (x,y,z) = f (-x,y,-z)	Spiegelung an der y-z-Ebene (S_{yz})
f (x,y,z) = f (-x,-y,z)	Spiegelung an der x-y-Ebene (S_{xy})
f (x,y,z) = f (-x,y,z)	Drehung an der z-Achse (D_z)
f (x,y,z) = f (x,-y,z)	Drehung an der y-Achse (D_y)
f (x,y,z) = f (x,y,-z)	Spiegelung an der x-z-Ebene (S_{xz})

Porträt eines dreidimensionalen Körpers

Gruppe II

Stellen Sie den Körper mittig auf den Ursprung (0;0;0).

6.) Fertigen Sie eine kleine Skizze von dem Körper an.

7.) Verändert der Körper seine Gestalt, wenn man ihn an der x-y-Ebene (x-z-Ebene, z-y-Ebene) spiegelt?

Ebene	
x-y Ebene	
y-z Ebene	
x-z Ebene	

8.) An welcher der drei Achsen (x,y,z-Achse) kann man den Körper um 180° drehen, ohne dass er seine Gestalt verändert?

Achse	
x-Achse	
y-Achse	
z-Achse	

9.) Der Körper Ihrer Gruppe kann so ein kartesisches Koordinatensystem gelegt werden, dass er durch die Gleichung $f(x,y,z)=0$ mit der Funktion $f(x,y,z):=\left(\frac{x}{12{,}25}\right)^2+\left(\frac{y}{12{,}25}\right)^2-\left(\frac{z}{13{,}75}\right)^2$ beschrieben werden kann. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf dem Körper liegen:

(8,5;0;0)		(10,5;0;19)		(0;7,25;4,25)		(6,9;0;0)	
(0;6,5;0)		(12,25;0;13,75)		(0;0;6,9)		(0;1;0)	
(0;0;0)		(5;0;13,65)		(0;7,85;10,2)		(0;6,9;0)	
(8,25;0;10,2)		(0;7,35;13,65)		(0;10,5;–5)		(0;12,25;13,75)	
(0;0;13,5)		$(0;0;13{,}65/\sqrt{2})$		(0;0;9,25)		(9,9;0;4,25)	

10.) Welche der folgenden Aussagen ist für die in 4.) definierte Funktion für alle Punkte (x,y,z) wahr? Was bedeuten sie geometrisch?

f (x,y,z) = f (x,-y,-z)　　f (x,y,z) = f (-x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,-y,z)　　f (x,y,z) = f (x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,y,z)　　f (x,y,z) = f (x,-y,z)

Porträt eines dreidimensionalen Körpers

Gruppe III

Stellen Sie den Körper mittig auf den Ursprung (0;0;0).

11.) Fertigen Sie eine kleine Skizze von dem Körper an.

12.) Verändert der Körper seine Gestalt, wenn man ihn an der x-y-Ebene (x-z-Ebene, z-y-Ebene) spiegelt?

Ebene	
x-y Ebene	
y-z Ebene	
x-z Ebene	

13.) An welcher der drei Achsen (x,y,z-Achse) kann man den Körper um 180° drehen, ohne dass er seine Gestalt verändert?

Achse	
x-Achse	
y-Achse	
z-Achse	

14.) Der Körper Ihrer Gruppe kann so ein kartesisches Koordinatensystem gelegt werden, dass er durch die Gleichung $f(x,y,z)=0$ mit der Funktion

$$f(x,y,z)=\left(\frac{x}{8{,}25}\right)^2+\left(\frac{y}{7{,}85}\right)^2-\frac{z}{10{,}2}$$

beschrieben werden kann. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf dem Körper liegen:

(8,5;0;0)		(10,5;0;19)		(0;7,25;4,25)		(6,9;0;0)	
(0;6,5;0)		(12,25;0;13,75)		(0;0;6,9)		(0;1;0)	
(0;0;0)		(5;0;13,65)		(0;7,85;10,2)		(0;6,9;0)	
(8,25;0;10,2)		(0;7,35;13,65)		(0;10,5;–5)		(0;12,25;13,75)	
(0;0;13,5)		$(0;0;13{,}65/\sqrt{2})$		(0;0;9,25)		(9,9;0;4,25)	

15.) Welche der folgenden Aussagen ist für die in 4.) definierte Funktion für alle Punkte (x,y,z) wahr? Was bedeuten sie geometrisch?

f (x,y,z) = f (x,-y,-z) f (x,y,z) = f (-x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,-y,z) f (x,y,z) = f (x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,y,z) f (x,y,z) = f (x,-y,z)

Porträt eines dreidimensionalen Körpers

Gruppe IV

Stellen Sie den Körper mittig auf den Ursprung (0;0;0).

16.) Fertigen Sie eine kleine Skizze von dem Körper an.

17.) Verändert der Körper seine Gestalt, wenn man ihn an der x-y-Ebene (x-z-Ebene, z-y-Ebene) spiegelt?

Ebene	
x-y Ebene	
y-z Ebene	
x-z Ebene	

18.) An welcher der drei Achsen (x,y,z-Achse) kann man den Körper um 180° drehen, ohne dass er seine Gestalt verändert?

Achse	
x-Achse	
y-Achse	
z-Achse	

19.) Der Körper Ihrer Gruppe kann so ein kartesisches Koordinatensystem gelegt werden, dass er durch die Gleichung $f(x,y,z)=0$ mit der Funktion $f(x,y,z):=\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{7{,}35}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}z}{13{,}65}\right)^2+1$ beschrieben werden kann. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf dem Körper liegen:

(8,5;0;0)		(10,5;0;19)		(0;7,25;4,25)		(6,9;0;0)	
(0;6,5;0)		(12,25;0;13,75)		(0;0;6,9)		(0;1;0)	
(0;0;0)		(5;0;13,65)		(0;7,85;10,2)		(0;6,9;0)	
(8,25;0;10,2)		(0;7,35;13,65)		(0;10,5;–5)		(0;12,25;13,75)	
(0;0;13,5)		$(0;0;13{,}65/\sqrt{2})$		(0;0;9,25)		(9,9;0;4,25)	

20.) Welche der folgenden Aussagen ist für die in 4.) definierte Funktion für alle Punkte (x,y,z) wahr? Was bedeuten sie geometrisch?

f (x,y,z) = f (x,-y,-z)   f (x,y,z) = f (-x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,-y,z)   f (x,y,z) = f (x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,y,z)   f (x,y,z) = f (x,-y,z)

Porträt eines dreidimensionalen Körpers

Gruppe V

Stellen Sie den Körper mittig auf den Ursprung (0;0;0).

21.) Fertigen Sie eine kleine Skizze von dem Körper an.

22.) Verändert der Körper seine Gestalt, wenn man ihn an der x-y-Ebene (x-z-Ebene, z-y-Ebene) spiegelt?

Ebene	
x-y Ebene	
y-z Ebene	
x-z Ebene	

23.) An welcher der drei Achsen (x,y,z-Achse) kann man den Körper um 180° drehen, ohne dass er seine Gestalt verändert?

Achse	
x-Achse	
y-Achse	
z-Achse	

24.) Der Körper Ihrer Gruppe kann so ein kartesisches Koordinatensystem gelegt werden, dass er durch die Gleichung $f(x,y,z)=0$ mit der Funktion $f(x,y,z):=\left(\frac{\sqrt{19}\cdot x}{10{,}5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}\cdot y}{10{,}5}\right)^2-z$ beschrieben werden kann. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf dem Körper liegen:

(8,5;0;0)		(10,5;0;19)		(0;7,25;4,25)		(6,9;0;0)	
(0;6,5;0)		(12,25;0;13,75)		(0;0;6,9)		(0;1;0)	
(0;0;0)		(5;0;13,65)		(0;7,85;10,2)		(0;6,9;0)	
(8,25;0;10,2)		(0;7,35;13,65)		(0;10,5;–5)		(0;12,25;13,75)	
(0;0;13,5)		$(0;0;13{,}65/\sqrt{2})$		(0;0;9,25)		(9,9;0;4,25)	

25.) Welche der folgenden Aussagen ist für die in 4.) definierte Funktion für alle Punkte (x,y,z) wahr? Was bedeuten sie geometrisch?

f (x,y,z) = f (x,-y,-z) f (x,y,z) = f (-x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,-y,z) f (x,y,z) = f (x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,y,z) f (x,y,z) = f (x,-y,z)

Porträt eines dreidimensionalen Körpers

Gruppe VI

Stellen Sie den Körper mittig auf den Ursprung (0,0,0).

26.) Fertigen Sie eine kleine Skizze von dem Körper an.

27.) Verändert der Körper seine Gestalt, wenn man ihn an der x-y-Ebene (x-z-Ebene, z-y-Ebene) spiegelt?

Ebene	
x-y Ebene	
y-z Ebene	
x-z Ebene	

28.) An welcher der drei Achsen (x,y,z-Achse) kann man den Körper um 180° drehen, ohne dass er seine Gestalt verändert?

Achse	
x-Achse	
y-Achse	
z-Achse	

29.) Der Körper Ihrer Gruppe kann so ein kartesisches Koordinatensystem gelegt werden, dass er durch die Gleichung $f(x,y,z)=0$ mit der Funktion

$$f(x,y,z):=\left(\frac{x}{9{,}9}\right)^2+\left(\frac{y}{7{,}25}\right)^2-\frac{z}{4{,}25}$$

beschrieben werden kann. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf dem Körper liegen:

(8,5;0;0)		(10,5;0;19)		(0;7,25;4,25)		(6,9;0;0)	
(0;6,5;0)		(12,25;0;13,75)		(0;0;6,9)		(0;1;0)	
(0;0;0)		(5;0;13,65)		(0;7,85;10,2)		(0;6,9;0)	
(8,25;0;10,2)		(0;7,35;13,65)		(0;10,5;–5)		(0;12,25;13,75)	
(0;0;13,5)		$(0;0;13{,}65/\sqrt{2})$		(0;0;9,25)		(9,9;0;4,25)	

30.) Welche der folgenden Aussagen ist für die in 4.) definierte Funktion für alle Punkte (x,y,z) wahr? Was bedeuten sie geometrisch?

f (x,y,z) = f (x,-y,-z) f (x,y,z) = f (-x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,-y,z) f (x,y,z) = f (x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,y,z) f (x,y,z) = f (x,-y,z)

Porträt eines dreidimensionalen Körpers

Gruppe VII

Stellen Sie den Körper mittig auf den Ursprung (0,0,0).

31.) Fertigen Sie eine kleine Skizze von dem Körper an.

32.) Verändert der Körper seine Gestalt, wenn man ihn an der x-y-Ebene (x-z-Ebene, z-y-Ebene) spiegelt?

Ebene	
x-y Ebene	
y-z Ebene	
x-z Ebene	

33.) An welcher der drei Achsen (x,y,z-Achse) kann man den Körper um 180° drehen, ohne dass er seine Gestalt verändert?

Achse	
x-Achse	
y-Achse	
z-Achse	

34.) Der Körper Ihrer Gruppe kann so ein kartesisches Koordinatensystem gelegt werden, dass er durch die Gleichung $f(x,y,z)=0$ **mit der Funktion** $f(x,y,z):=\left(\sqrt{x^2+y^2}-13{,}8\right)^2+z^2-6{,}9$ **beschrieben werden kann. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf dem Körper liegen:**

(8,5;0;0)		(10,5;0;19)		(0;7,25;4,25)		(6,9;0;0)	
(0;6,5;0)		(12,25;0;13,75)		(0;0;6,9)		(0;1;0)	
(0;0;0)		(5;0;13,65)		(0;7,85;10,2)		(0;6,9;0)	
(8,25;0;10,2)		(0;7,35;13,65)		(0;10,5;–5)		(0;12,25;13,75)	
(0;0;13,5)		$(0;0;13{,}65/\sqrt{2})$		(0;0;9,25)		(9,9;0;4,25)	

35.) Welche der folgenden Aussagen ist für die in 4.) definierte Funktion für alle Punkte (x,y,z) **wahr? Was bedeuten sie geometrisch?**

f (x,y,z) = f (x,-y,-z) f (x,y,z) = f (-x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,-y,z) f (x,y,z) = f (x,y,-z)
f (x,y,z) = f (-x,y,z) f (x,y,z) = f (x,-y,z)

	Mini-Skizze	Welche Symmetrien liegen vor? (Dx, Dy, Dz, Sxy, Sxz, Syz)	Gleichung
I			$\left(\frac{x}{8{,}5}\right)^2+\left(\frac{y}{6{,}5}\right)^2-\left(\frac{z}{9{,}25}\right)^2=1$
II			$\left(\frac{x}{12{,}25}\right)^2+\left(\frac{y}{12{,}25}\right)^2-\left(\frac{z}{13{,}75}\right)^2=0; z\geq 0$
III			$\left(\frac{x}{8{,}25}\right)^2+\left(\frac{y}{7{,}85}\right)^2-\frac{z}{10{,}2}=0$
IV			$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{7{,}35}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}z}{13{,}65}\right)^2=-1$
V			$\left(\frac{\sqrt{19}\cdot x}{10{,}5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}\cdot y}{10{,}5}\right)^2-z=0$
VI			$\left(\frac{x}{9{,}9}\right)^2+\left(\frac{y}{7{,}25}\right)^2-\frac{z}{4{,}25}=0$
VII			$\left(\sqrt{x^2+y^2}-13{,}8\right)^2+z^2=6{,}9$

D_x Drehung an der x-Achse
D_y Drehung an der y-Achse
D_z Drehung an der z-Achse

S_{xy} Spiegelung an der x-y-Ebene
S_{xz} Spiegelung an der x-z-Ebene
S_{yz} Spiegelung an der y-z-Ebene

Punkte auf den Flächen und deren Gleichungen

Gruppe	Bezeichnung	Punkte	Gleichung
I	Einschaliges Hyperboloid	(8,5;0;0), (0;6,5;0); (0;0;9,25)	$\left(\frac{x}{8,5}\right)^2+\left(\frac{y}{6,5}\right)^2-\left(\frac{z}{9,25}\right)^2=1$
II	Halber Kegel	(12,25;0;13,75), (0;12,25;13,75), (0;0;13,5)	$\left(\frac{x}{12,25}\right)^2+\left(\frac{y}{12,25}\right)^2-\left(\frac{z}{13,75}\right)^2=0; z\geq 0$
III	Elliptisches Paraboloid I	(8,25;0;10,2), (0;7,85;10,2); (0;0;0)	$\left(\frac{x}{8,25}\right)^2+\left(\frac{y}{7,85}\right)^2-\frac{z}{10,2}=0$
IV	Zweischaliges Hyperboloid	(5;0;13,65), (0;7,35;13,65), $(0;0;\frac{13,65}{\sqrt{2}})$	$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{7,35}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}z}{13,65}\right)^2=-1$
V	Hyperbolisches Paraboloid	(10,5;0;19), (0;10,5;–5); (0;0;0)	$\left(\frac{\sqrt{19}\cdot x}{10,5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}\cdot y}{10,5}\right)^2-z=0$
VI	Elliptisches Paraboloid II	(9,9;0;4,25), (0;7,25;4,25), (0;0;0)	$\left(\frac{x}{9,9}\right)^2+\left(\frac{y}{7,25}\right)^2-\frac{z}{4,25}=0$
VII	Torus	(6,9;0;0), (0;6,9;0); (0;0;6,9); (20,7;0;0); (0;20,7;0)	$\left(\sqrt{x^2+y^2}-13,8\right)^2+z^2=6,9$